

带负顾客的非空竭服务休假排队系统的稳态分析*

尹小玲

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 利用求吸收分布以及普通 $M/G/1$ 排队系统的稳态条件, 研究了一类带有负顾客且正顾客有流失的 $M/G/1$ 非空竭服务休假排队系统的稳态条件。对先到先服务规则分别考虑了负顾客的两种移除策略: 移除队首 (RCH) 和移除队尾 (RCE)。

关键词: 负顾客; 移除策略; 吸收分布

中图分类号: O226 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 02-0001-04

负顾客最初是由 Gelenbe 于 1989 年引入排队网络^[1], 称之为 G-网络。1991 年 Gelenbe 等^[2]进一步利用标值点过程研究了带有负顾客的 $M/G/1$ 排队系统, 得到队长过程为正常返的再生过程的充分必要条件。

通常负顾客到达系统不是请求服务, 其作用可能是破坏性的, 也可能是激活信号。负顾客概念的引入, 使许多现实系统找到了数学模型。如在计算机网络中, 负顾客的到达可视为病毒或其他破坏性因素的发生; 在通讯网络中, 在信息传递过程中由于交换机故障使得信息包丢失, 亦可认为是负顾客的出现所致等等。

在排队网络中, 负顾客的出现可能使某些正顾客中止服务或中止排队并从系统中消失, 消失的顾客数可能是单个的, 也可能是成批的, 每批消失的顾客数服从某概率分布; 负顾客的出现也可能使服务器故障而进入修理状态, 即灾难性等等。Harrison 等^[3]于 1996 年对负顾客的两种不同抵消策略 (移除正在接受服务的顾客 (RCH) 和移除队尾 (RCE) 的顾客) 以及两种排队规则 (先到先服务 (FCFS) 和后到先服务 (LCFS)) 的各种组合的 $M/G/1$ 系统做了分析。

由于负顾客有着众多的应用背景, 很快就引起了研究工作者的极大兴趣和重视, 许多作者考虑具有负顾客的单服务器排队系统^[2-7]。本文将负顾客引入休假随机发生 (非空竭服务休假) 且正顾客有流失的 $M/G/1$ 排队系统。

设服务器交替地处于正常状态 (工作状态或待机状态) 和休假状态, 正常时间 X 服从参数为 α

的指数分布; 休假时间 V 服从一般分布, 分布函数为 $V(x)$, 其失效率为 $v(x)$ 。由于服务器休假而中止服务的顾客等待休假结束后立即重新开始服务。

系统有两类顾客, 正顾客和负顾客。两类顾客的到达分别形成强度为 λ 和 λ^- 的泊松过程。正顾客到达时, 若服务器处于正常状态, 则进入系统等待服务; 若服务器处于休假状态, 则以概率 p ($0 < p < 1$) 留下等待服务, 以概率 $q = 1 - p$ 离开系统。所有到达系统的正顾客按先到先服务接受服务, 服务时间是相互独立同分布的随机变量, 其共同的分布函数为 $B(x)$, 失效率为 $\mu(x)$ 。

负顾客到达系统后随即消失。我们分别考虑两种移除策略: 一种是移除队首策略, 即当服务器处于工作状态时, 负顾客同时带走正在接受服务的顾客; 处于休假状态时, 它使服务器中止休假, 同时带走一个正顾客。另一种是移除队尾策略, 即负顾客同时带走队尾的正顾客, 当系统顾客数大于一时, 对服务器处于正常状态或休假状态无影响; 只有当系统中剩一位顾客时, 负顾客将其带走的同时使服务器从工作状态或休假状态进入正常待机状态。

设上述各随机变量相互独立且具有有限的一阶矩。

1 系统的稳态条件

排队系统的稳态条件, 通常是利用 Foster 准则和 Kaplan 条件证明^[5,8-10], 而对于复杂排队系统则可能会遇到困难。本文所论的排队系统, 由于休假

* 收稿日期: 2007-10-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60574002; 10501014)

作者简介: 尹小玲 (1957 年生), 女, 副教授, 硕士生导师; E-mail: stsyxl@mail.sysu.edu.cn

随机发生,使得一个顾客的服务时间受到影响,将出现服务-休假交替发生,直到最后完成服务的情形,再加上负顾客对服务时间的影响,情形就更复杂了。下面利用吸收分布来得到系统的稳态条件^[11]。

1.1 移除队首策略情形

根据系统描述,正顾客的离去有两种情形,一是服务结束离去,二是由于负到达离去。令 t_n 是第 n 个顾客离去时刻,显然在忙期中,两个相继离去的时间间隔 $t_{n+1} - t_n$ 相互独立同分布,与 n 无关,不妨称其为广义服务时间,记为 $S = t_{n+1} - t_n$ 。在此段时间中,可能经历服务器休假而使服务中断,待休假结束后再重新开始服务。

记密度函数 $f(x)$ 的拉普拉斯变换 (LT) 为 $\tilde{f}(s)$, 即 $\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$ 。则相应的分布函数 $F(x)$ 的拉普拉斯-斯蒂吉斯变换 (LST) 为 $F^*(s) = \tilde{f}(s)$ 。

引理 1 广义服务时间 S 的分布密度的拉普拉斯

$$\text{斯变换 (LT) 为 } \tilde{p}_0(s) = \frac{\lambda^-}{s + \lambda^-} + \frac{s}{s + \lambda^-} \times \frac{(s + \alpha + \lambda^-) B^*(s + \alpha + \lambda^-)}{s + \alpha + \lambda^- - \alpha V^*(s + \lambda^-) [1 - B^*(s + \alpha + \lambda^-)]} \quad (1)$$

证明 因为在广义服务时间中,服务器可能经历正常和休假两种状态。令

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{时刻 } t \text{ 顾客已结束服务离去} \\ 1, & \text{时刻 } t \text{ 服务器处于服务状态} \\ 2, & \text{时刻 } t \text{ 服务器处于休假状态} \end{cases}$$

$\xi(t)$ 是时刻 t 服务器所处状态的已逝去时间;

则 $\{(C(t), \xi(t)), t \geq 0\}$ 构成一吸收马氏过程。根据模型描述,可画出状态转移图:

$$(2, 0) \xleftarrow{\alpha} (1, x) \xrightarrow{\lambda^- + \mu(x)} (0) \xleftarrow{\lambda^-} (2, x) \xrightarrow{v(x)} (1, 0)$$

记: $P_0(t) = P\{C(t) = 0\}$, $p_0(t) = P'_0(t)$

$$p_i(t, x) dx = P\{C(t) = i, x \leq \xi(t) < x + dx\}, \quad t \geq 0, x > 0, i = 1, 2$$

设 $t=0$ 时一个顾客开始服务,则 $p_1(0, x) = \delta(x)$ 。因为事件 $\{C(t + \Delta t) = 0\}$ 可分解为下列事件的不交并:(1) 时刻 t 服务器已处于 0;(2) 时刻 t 服务器处于 $(1, x)$ 状态,在 $(t, t + \Delta t]$ 时间内由于负顾客到达使正顾客离去;(3) 时刻 t 服务器处于 $(1, x)$ 状态,在 $(t, t + \Delta t]$ 时间内服务完成使正顾客离去;(4) 时刻 t 服务器处于 $(2, x)$ 状态,在 $(t, t + \Delta t]$ 时间内由于负顾客到达使正顾客离去。故有

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) + \int_0^{+\infty} [\lambda^- + \mu(x)] \Delta t p_1(t, x) dx + \int_0^{+\infty} \lambda^- \Delta t p_2(t, x) dx + o(\Delta t)$$

移项后两边除以 Δt 并令 $\Delta t \rightarrow 0$ 即得

$$p_0(t) = \int_0^{+\infty} [\lambda^- + \mu(x)] p_1(t, x) dx + \int_0^{+\infty} \lambda^- p_2(t, x) dx, \quad (2)$$

同理可得,对 $x > 0$, 有

$$p_1(t + \Delta t, x + \Delta t) dx = p_1(t, x) dx [1 - (\alpha + \lambda^- + \mu(x)) \Delta t] + o(\Delta t)$$

移项后两边除以 Δt 并令 $\Delta t \rightarrow 0$ 即得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) p_1(t, x) = -[\alpha + \lambda^- + \mu(x)] p_1(t, x) \quad (3)$$

同理有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) p_2(t, x) = -[\lambda^- + v(x)] p_2(t, x) \quad (4)$$

边界条件:

$$p_1(t, 0) = \int_0^{+\infty} v(x) p_2(t, x) dx \quad (5)$$

$$p_2(t, 0) = \alpha \int_0^{+\infty} p_1(t, x) dx \quad (6)$$

对(2)-(6)式取拉普拉斯变换,得

$$\tilde{p}_0(s) = \int_0^{+\infty} [\lambda^- + \mu(x)] \tilde{p}_1(s, x) dx + \int_0^{+\infty} \lambda^- \tilde{p}_2(s, x) dx \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{p}_1(s, x) = -[s + \alpha + \lambda^- + \mu(x)] \tilde{p}_1(s, x) + \delta(x) \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{p}_2(s, x) = -[s + \lambda^- + v(x)] \tilde{p}_2(s, x) \quad (9)$$

$$\tilde{p}_1(s, 0) = \int_0^{+\infty} v(x) \tilde{p}_2(s, x) dx \quad (10)$$

$$\tilde{p}_2(s, 0) = \alpha \int_0^{+\infty} \tilde{p}_1(s, x) dx \quad (11)$$

解(8)(9)得

$$\tilde{p}_1(s, x) = [1 + \tilde{p}_1(s, 0)] e^{-(s + \alpha + \lambda^-)x} \bar{B}(x) \quad (12)$$

$$\tilde{p}_2(s, x) = \tilde{p}_2(s, 0) e^{-(s + \lambda^-)x} \bar{V}(x) \quad (13)$$

将(12)(13)代入(10)(11)得

$$1 + \tilde{p}_1(s, 0) = \frac{s + \alpha + \lambda^-}{s + \alpha + \lambda^- - \alpha V^*(s + \lambda^-) [1 - B^*(s + \alpha + \lambda^-)]} \quad (14)$$

$$\tilde{p}_2(s, 0) = (1 + \tilde{p}_1(s, 0)) \frac{\alpha [1 - B^*(s + \alpha + \lambda^-)]}{s + \alpha + \lambda^-} \quad (15)$$

联合 (7), (12) - (15) 得 $\bar{p}_0(s) = \frac{\lambda^-}{s + \lambda^-} + \frac{s}{s + \lambda^-} \times \frac{(s + \alpha + \lambda^-)B^*(s + \alpha + \lambda^-)}{s + \alpha + \lambda^- - \alpha V^*(s + \lambda^-)[1 - B^*(s + \alpha + \lambda^-)]}$

引理2 广义服务时间的均值

$$ES = \frac{1}{\lambda^-} \frac{[\alpha + \lambda^- - \alpha V^*(\lambda^-)][1 - B^*(\alpha + \lambda^-)]}{\alpha + \lambda^- - \alpha V^*(\lambda^-)[1 - B^*(\alpha + \lambda^-)]} \quad (16)$$

证明 这由 $ES = -\bar{p}'(0)$ 立得。

引理3 服务器处于正常状态的概率 P_B 和处于休假状态的概率 P_V 分别为

$$P_B = \frac{\lambda^-}{\lambda^- + \alpha[1 - V^*(\lambda^-)]} \quad P_V = \frac{\alpha[1 - V^*(\lambda^-)]}{\lambda^- + \alpha[1 - V^*(\lambda^-)]} \quad (17)$$

证明 服务器交替地处于正常状态和休假状态。若 X, V, T^- 分别为服务器持续正常的时间长度、休假长度和负顾客到达间距, 则 X 服从参数为 α 的指数分布。由于负顾客的到达会使服务器从休假状态转入正常状态, 故实际的休假长度为 $Y = \min(V, T^-)$, 再由 V, T^- 的独立性及其指数分布的无记忆性, 则

$P(Y > t) = P(V > t)P(T^- > t) = (1 - V(t))e^{-\lambda^- t}$ 。
由交替更新过程理论知

$$P_B = \frac{EX}{EX + EY}, \quad P_V = \frac{EY}{EX + EY},$$

将 $EX = \frac{1}{\alpha}$, $EY = \frac{1 - V^*(\lambda^-)}{\lambda^-}$ 代入即得证。

定理1 负顾客移除队首策略下, 系统存在稳态的充分必要条件是

$$\frac{\lambda^- + p\alpha[1 - V^*(\lambda^-)]}{\lambda^- + \alpha[1 - V^*(\lambda^-)]} \left(\frac{\lambda^+}{\lambda^-} \right) [\alpha + \lambda^- - \alpha V^*(\lambda^-)] \frac{[1 - B^*(\alpha + \lambda^-)]}{\alpha + \lambda^- - \alpha V^*(\lambda^-)[1 - B^*(\alpha + \lambda^-)]} < 1 \quad (18)$$

证明 将系统视为一个普通 $M/G/1$ 排队系统, 其中服务时间为上述广义服务时间 S 。普通 $M/G/1$ 排队系统的稳态条件是 $\rho = \lambda(ES) < 1$, 其中 λ 是到达率。而在本系统中, 当服务器处于正常状态时, 到达率为 λ^+ ; 当服务器处于休假状态时, 到达率为 $p\lambda^+$, 故稳态条件为 $\lambda^+(P_B + pP_V)ES < 1$, 即 (18) 式成立。

1.2 移除队尾策略情形

令 τ_n 是没有负顾客影响下第 n 个服务正常完成的时刻, 则 $\tau_{n+1} - \tau_n$ 是一个顾客开始服务到他正常完成服务离去的一段时间, 它们相互独立同分布, 与 n 无关。记为 $S_1 = \tau_{n+1} - \tau_n$, 则 S_1 即为时

间 S 中消除负顾客的影响的情形。因此, 在 (1) (16) (17) 式中令 $\lambda^- \rightarrow 0$, 即得下面的各引理。

引理4 S_1 的分布密度 $q(t)$ 的拉普拉斯变换 (LT) 为

$$\bar{q}(s) = \frac{(s + \alpha)B^*(s + \alpha)}{s + \alpha - \alpha V^*(s)[1 - B^*(s + \alpha)]} \quad (19)$$

$$\text{引理5} \quad ES_1 = \frac{(1 + \alpha EV)(1 - B^*(\alpha))}{\alpha B^*(\alpha)} \quad (20)$$

引理6 服务器处于正常状态的概率 P_B 和处于休假状态的概率 P_V 分别为

$$P_B = \frac{1}{1 + \alpha EV}, \quad P_V = \frac{\alpha EV}{1 + \alpha EV} \quad (21)$$

移除队尾是一个较复杂的情形, 考虑 $p = 1$ 的特殊情形。这时系统可视为一个等价的负顾客移除队尾且先到先服务 (RCE-FCFS) 的 $M/G/1$ 系统, 其中服务时间为 S_1 , 利用 $M/G/1$ RCE-FCFS 排队系统的稳态条件^[3], 立得下述定理。

定理2 负顾客移除队尾策略下, 系统存在稳态的充分必要条件是

$$0 < \frac{\lambda^+ ES_1 + \lambda^- \int_0^\infty \eta(u)[(1 - Q(u))ES_1 - E_{S_1(u)}]du}{1 + \lambda^- ES_1 + \lambda^- \int_0^\infty \eta(u)[(1 - Q(u))ES_1 - E_{S_1(u)}]du} \quad (22)$$

其中 $E_{S_1(u)} = \int_0^\infty tq(t+u)dt$, $Q(t)$ 是 S_1 的分布函数, $\eta(u)$ 是第一类 Fredholm 积分方程的解 (参见 [3] 引理 1.2)。

2 几种特殊情形

(1) $\lambda^- = 0$, 即没有负顾客的影响的情形。

这时, 不论移除队首策略还是移除队尾策略, 均化为一个具有休假随机发生且休假期有顾客流失的 $M/G/1$ 排队系统。系统存在稳态的充分必要条件是

$$\lambda^+ \frac{[1 + p\alpha EV][1 - B^*(\alpha)]}{\alpha B^*(\alpha)} < 1$$

(2) $\alpha = 0$, 即没有休假, 这时系统是普通的有负顾客的 $M/G/1$ 排队系统, 服务器以概率 1 处于正常状态。

1) 移除队首策略情形。

在 (16), (18) 式中令 $\alpha \rightarrow 0$, 即得广义服务时间的均值

$$ES = \frac{1}{\lambda^-} [1 - B^*(\lambda^-)]$$

系统存在稳态的充分必要条件是

$$\lambda + \frac{1 - B^*(\lambda^-)}{\lambda^-} < 1$$

2) 移除队尾策略情形。

在(19), (20)式中令 $\alpha \rightarrow 0$, 即得 $\bar{q}(s) = B^*(s)$, 广义服务时间的均值 $ES_1 = -B^*(0)$, 则系统存在稳态的充分条件与 [3] 中相吻合。

参考文献:

- [1] GELENBE E. Random neural networks with positive and negative signals and product form solution [J]. Neural Computation, 1989, 1(4): 502 - 510.
- [2] GELENBE E, GLYNN P, SIGMAN K. Queues with negative arrivals [J]. J Appl Prob, 1991, 28: 245 - 250.
- [3] HARRISON P G, PITEL E. The $M/G/1$ queue with negative customers [J]. Adv Appl Prob, 1996, 28: 540 - 566.
- [4] HARRISON P G, PITEL E. Sojourn times in single server queues with negative customers [J]. J Appl Prob, 1993, 30: 943 - 963.
- [5] ZHOU W H, DENG Y L. On the $M/G/1$ G -queues with unreliable server [J]. 运筹学报, 2006, 10(2): 28 - 36.
- [6] 伍慧玲, 尹小玲. 有单移除策略的 $M/G/1$ 重试可修排队系统 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2005, 44: 133 - 137.
- WU H L, YIN X L. An $M/G/1$ retrial queue with individual removal and repair [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2005, 44: 133 - 137.
- [7] 尹小玲, 邓永录, 招雁鸿. 带有负顾客且正顾客有流失的 $M/G/1$ 休假排队系统 [C]. 中国运筹学会可靠性学会第七届学术会议论文集, (RSORSC'2005), 北京: 清华大学出版社, 2005, 6: 123 - 128.
- YIN X L, DENG Y L, ZHAO Y H. An $M/G/1$ vacation G -queues with customer losing [C]. Proceedings of the Seventh Symposium on Reliability, Beijing: Qinghua University Publish House, 2005, 6: 123 - 128.
- [8] KAPLAN M. A sufficient condition for nonergodicity of a Markov Chain [J]. IEEE Trans Inform Theory, 1979, 25: 470 - 471.
- [9] FOSTER F G. On the stochastic processes associated with certain queueing processes [J]. Ann Math Statist, 1953, 24: 355 - 360.
- [10] KRISHNA KUMAR B, VIJAYAKUMAR A, ARIVUDAINAMBI D. An $M/G/1$ retrial queueing system with two-phase service and preemptive resume [J]. Annals of Operations Research, 2002, 113: 61 - 79.
- [11] 史定华. 随机模型的密度演化方法 [M]. 北京: 科学教育出版社, 1999.
- SHI D H. The method of density deduce on stochastic models [M]. Beijing: Science and Education Publish House, 1999.

Stability Analysis of Queues with Negative Customers and Vacation on Non-Exhaustive Service

YIN Xiao-ling

(Department of Mathematics and Scientific Computation, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The stable condition on queueing system with negative customers and vacation on non-exhaustive service is discussed by finding absorb distribution and using the stable condition of classical $M/G/1$ system. Two kinds of remove strategies of negative customers are considered: remove the customer at the head (RCH) and remove the customer at the end (RCE).

Key words: negative customer; remove strategies; absorb distribution